Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 7
07. 12. 2021

Musterlösung der Blatt 7 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I"

1. Gegeben seien die folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Ortho**normal**basis des von diesen Vektoren aufgespannten Raumes.

Lösung

$$\vec{b}_1 = \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad |\vec{b}_1| = \sqrt{5};$$

$$\vec{b}_2 = \vec{y} - \frac{(\vec{y}\cdot\vec{b}_1)}{|\vec{b}_1|^2}\,\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}(2+0+0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix};$$

$$|\vec{b}_2| = \sqrt{\frac{64+16+25}{25}} = \frac{\sqrt{105}}{5};$$

$$\vec{b}_3 = \vec{z} - \frac{(\vec{z}\cdot\vec{b}_1)}{|\vec{b}_1|^2}\,\vec{b}_1 - \frac{(\vec{z}\cdot\vec{b}_2)}{|\vec{b}_2|^2}\,\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}(0+4+0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{105}(0-8-5)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{13}{105}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{2}{21}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$|\vec{b}_3| = \sqrt{\frac{16+4+64}{441}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\vec{b}_4 = \vec{u} - \frac{(\vec{u}\cdot\vec{b}_1)}{|\vec{b}_1|^2}\,\vec{b}_1 - \frac{(\vec{u}\cdot\vec{b}_2)}{|\vec{b}_2|^2}\,\vec{b}_2 - \frac{(\vec{u}\cdot\vec{b}_3)}{|\vec{b}_3|^2}\,\vec{b}_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{25}{105}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}\right]\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{21^2}{4\cdot 21}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{21}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]\frac{2}{21}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}(1-4)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{25}{105}(8+8)\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{1}{21}(2+2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{16}{105}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{4}{21}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Orthonormalen Basisvektoren:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \frac{1}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

2. Berechnen Sie folgende Ausdrücke und benennen Sie die resultierenden Matrizen gemäß den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.2.1 des Vorlesungsskriptes. Geben Sie die Dimension der darin vorkommenden, sowie der resultierenden Matrizen an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -12 & 4 & -2 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}(5 \quad 3 \quad 1);$$

$$(4 \quad 1 \quad 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -12 & 4 & -2 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & -1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 7 & 2\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 3 + 6\cdot 7 & 4\cdot 1 + 6\cdot 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\cdot 2 + 1\cdot 4 & 0\cdot 5 + 1\cdot(-1) \\ 7\cdot 2 + 6\cdot 4 & 7\cdot 5 + 6\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 54 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 38 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 18 \\ 162 & 84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 38 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 19 \\ 124 & 55 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}(5 \quad 3 \quad 1) = \begin{pmatrix} -20 & -12 & -4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 10 & 6 & 2 \end{pmatrix};$$

$\mathbf{3} \times 1 \quad 1 \times \mathbf{3} \qquad\qquad \mathbf{3} \times \mathbf{3}$

$$(4 \quad 1 \quad 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\cdot(-1) + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = 1.$$

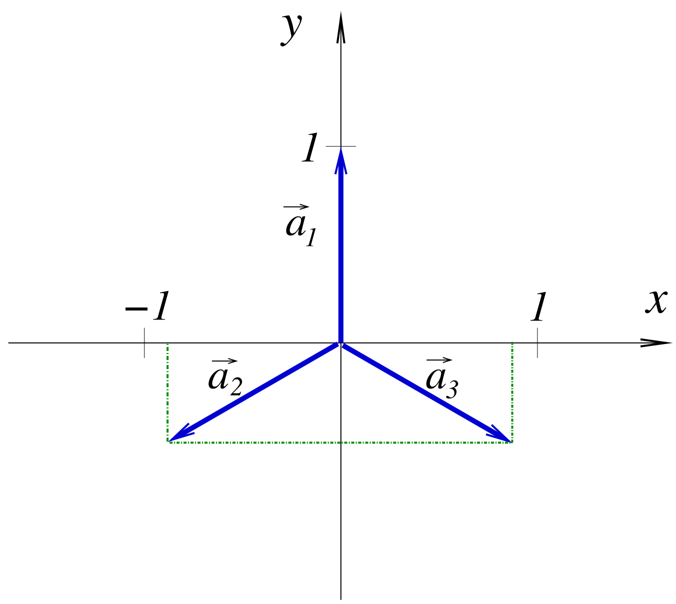
$\mathbf{1} \times 3 \qquad 3 \times \mathbf{1} \qquad\qquad \mathbf{1} \times \mathbf{1}$

3. !!!!! BONUS Aufgabe !!!!!!

Gegeben seien die drei Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, sowie die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Stellen Sie die drei Vektoren $\vec{a}_i$ zeichnerisch dar. Welchen Betrag haben sie? Berechnen Sie die Vektoren $A\vec{a}_i$ für $i = 1, 2, 3$ und vergleichen Sie die berechneten Vektoren mit den ursprünglichen. Vollziehen Sie das gleiche für die Matrix B. Beschreiben Sie in Worten die Operationen, die die Matrizen A und B angewendet auf die Vektoren $\vec{a}_i$ ausführen.

Lösung

$|\vec{a}_1| = 1;$
$|\vec{a}_2| = 1;$
$|\vec{a}_3| = 1.$



$$A\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \vec{a}_2;$$

$$A\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \vec{a}_3;$$

$$A\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a}_1;$$

$$B\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a}_1;$$

$$B\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \vec{a}_3;$$

$$B\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \vec{a}_2;$$

Die Interpretation: A – Drehung um 120° gegen Uhrzeigersinn,
B – Spiegelung an der y-Achse.

4. Berechnen Sie die Inverse der 2×2–Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, indem Sie die Matrix–Gleichung $AB = E$ in vier Gleichungen für die vier Unbekannten B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} umschreiben und diese direkt auflösen. Führen Sie die Probe durch.

Lösung

$AB = E$;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{array}{llll}
1 \cdot B_{11} + 2 \cdot B_{21} = 1; & & (2/3)B_{21} = 1; & B_{21} = 3/2; \\
1 \cdot B_{12} + 2 \cdot B_{22} = 0; & B_{12} = -2B_{22}; & & B_{12} = 1; \\
3 \cdot B_{11} + 4 \cdot B_{21} = 0; & B_{11} = -(4/3)B_{21}; & & B_{11} = -2; \\
3 \cdot B_{12} + 4 \cdot B_{22} = 1; & & -2B_{22} = 1; & B_{22} = -(1/2).
\end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Die Probe

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -(1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

FAKULTATIVE Aufgaben

F1. Die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ auf.

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Ortho**normal**basis dieses Unterraums.

a) **Lösung**

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1)}{|\vec{b}_1|^2}\,\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1)}{|\vec{b}_1|^2}\,\vec{b}_1 - \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2)}{|\vec{b}_2|^2}\,\vec{b}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{7}{26} - \frac{3 \cdot 11}{2 \cdot 13} \\ \frac{3}{26} - \frac{3}{26} \\ 2 - \frac{4}{26} - \frac{48}{26} \\ 1 - \frac{2}{26} - \frac{24}{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Orthonormalen Basisvektoren:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \sqrt{\frac{1}{442}}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

b) Welche Dimension hat dieser Unterraum? – **2**.

F2. Gegeben seien die Matritzen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie:
$AB - BA$, $(A + B)C$ und $(5A)(2B)$.

Lösung

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 13 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 6 & 13 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(A + B)C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - 4 & 12 + 15 & 8 + 2 + 5 \\ 1 & 3 + 3 & 2 + 1 \\ 2 - 4 & 6 + 9 & 4 + 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 27 & 15 \\ 1 & 6 & 3 \\ -2 & 15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(5A)(2B) = 10AB = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 50 \\ 10 & 10 & 10 \\ 60 & 40 & 60 \end{pmatrix}$$