Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

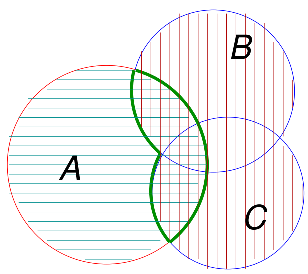
WS 21/22
Blatt 1
26. 10. 2021

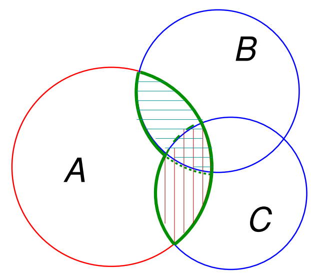
Musterlösung der Blatt 1 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Überzeugen Sie sich anhand von *Venn-Diagrammen* (Darstellung von Mengen durch Flächenstücke – siehe Vorlesung) von der Gültigkeit der folgende Sätze

a) $A \cap (B \cup C) \quad = \quad (A \cap B) \cup (A \cap C);$

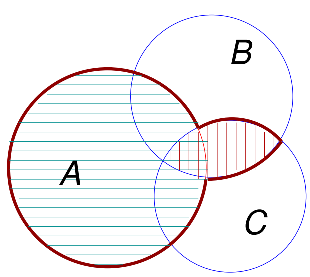
(1.0 Punkte)

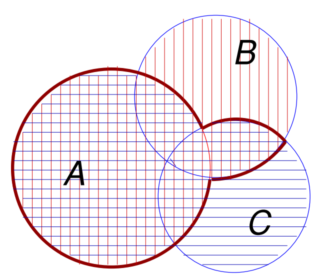




b) $A \cup (B \cap C) \quad = \quad (A \cup B) \cap (A \cup C);$

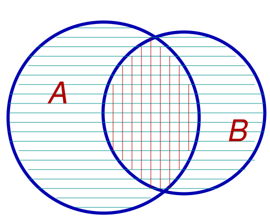
(1.0 Punkte)

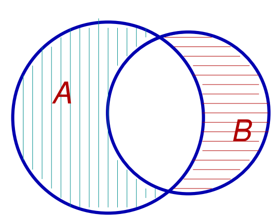




c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad = \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus A);$

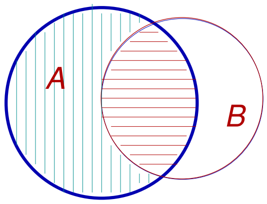
(1.0 Punkte)





d) $A \quad = \quad (A \setminus B) \cup (A \cap B);$

(1.0 Punkte)

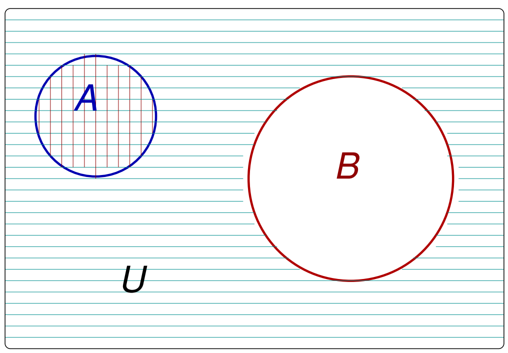


2. Überzeugen Sie sich anhand von *Venn-Diagrammen* unter welchen Bedinungen die folgende Gleichungen wahr sind:
$(A \subseteq U$ und $B \subseteq U)$

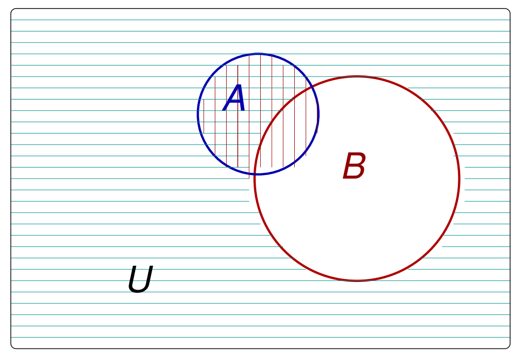
a) $A \cap B^c = A$

(1.0 Punkte)

Ja $(A \cap B = \{\})$



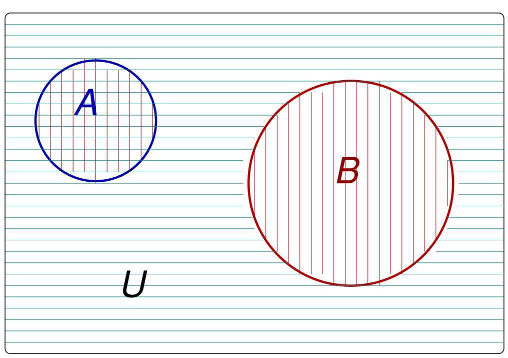
Nein



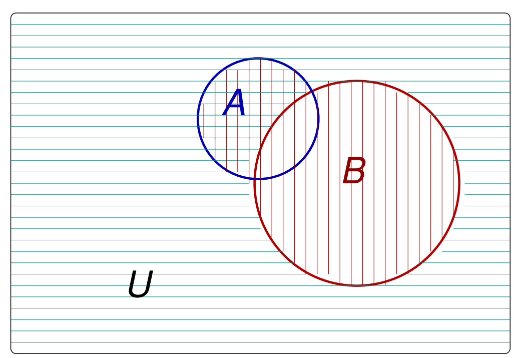
b $(A \cup B) \cap B^c = A$

(1.0 Punkte)

Ja $(A \cap B = \{\})$



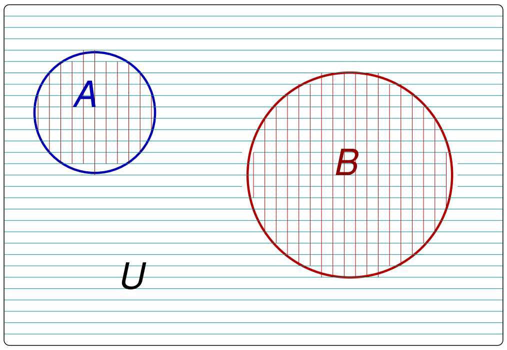
Nein



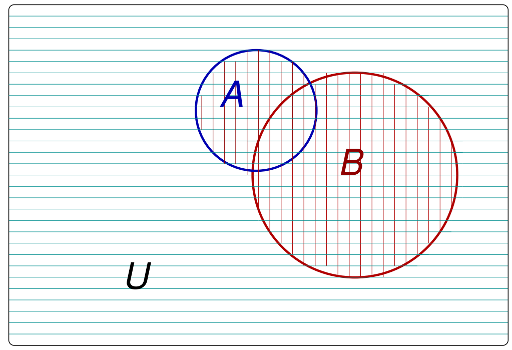
c) $$(A \cup B^c) \cup B = A \cup B$$

(1.0 Punkte)

Nein



Nein



Wahr ist für $A \equiv B^c$ oder $B \equiv A^c$ oder $A \cup B = U$.
Alle drei Bedinguggen äquivalent sind.

F1. Gegeben sei die Menge $M = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ von Symmetrieoperationen, die ein gleichseitiges Dreieck auf sich selbst abbilden. E, C_3, C_3^2 wurden in der Vorlesung definiert, und σ_i sind die Spiegelungen an den Winkelhalbierenden im Punkt i des Dreiecks (Abb.1).

a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel für M bezüglich der Hintereinanderausführung ($\circ$) der Operationen auf.

b) Bildet M bezüglich $\circ$ eine Gruppe? Überprüfen Sie, ob alle Gruppenaxiome erfüllt sind. Überprüfen Sie das Assoziativgesetz nur an einigen Beispielen an Hand der Verknüpfungstafel. Geben Sie zu jedem Element aus M sein inverses Element an.

c) Bildet M bezüglich $\circ$ eine abelsche Gruppe?

d) Geben Sie möglichst viele Untergruppen der Gruppe an (Gruppenaxiome prüfen). Sind diese Untergruppen abelsch?

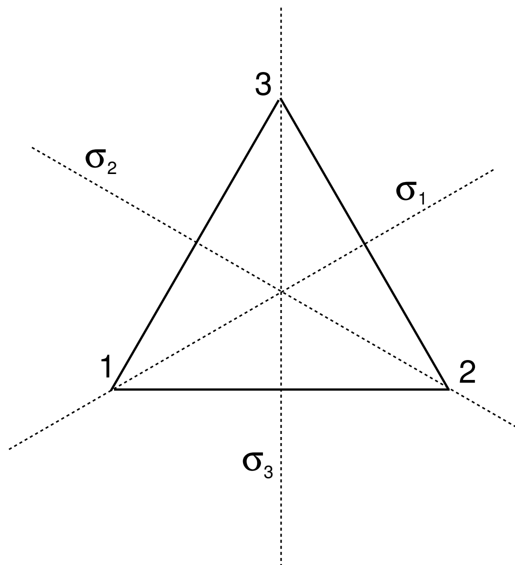
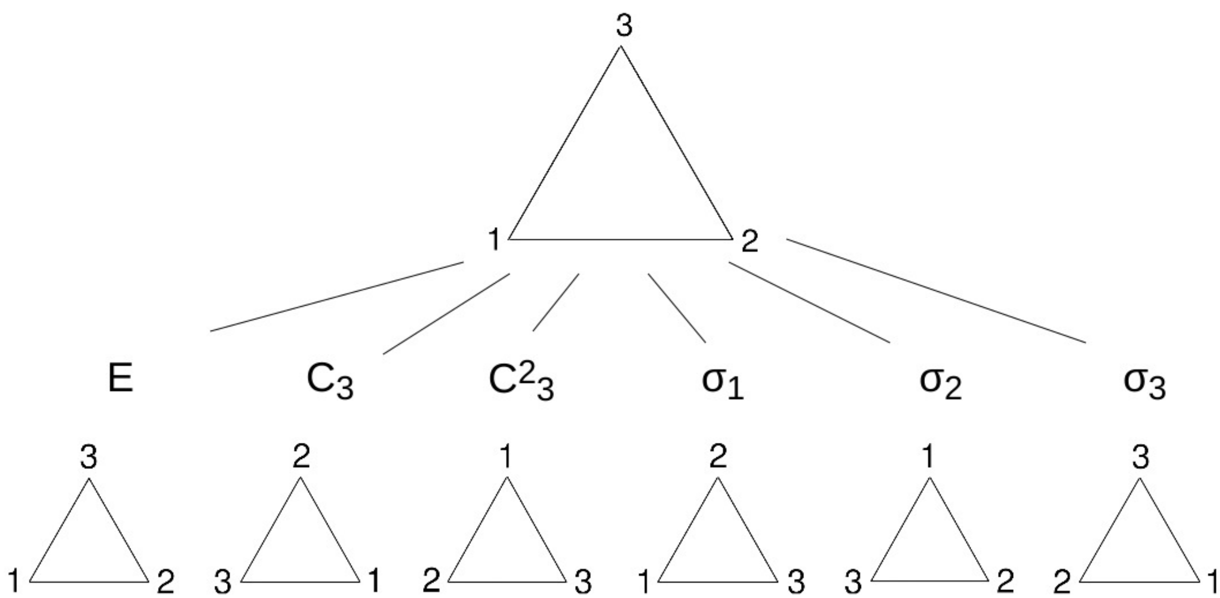


Abb.1

a)



$$C_3 \circ C_3 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; C_3 \;{}_{3}\overset{2}{\triangle}_{1} \;\rightarrow\; {}_{2}\overset{1}{\triangle}_{3} \;= C_3^2$$

$C_3 \circ C_3^2 = E$

$$C_3 \circ \sigma_1 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; C_3 \;{}_{1}\overset{2}{\triangle}_{3} \;\rightarrow\; {}_{2}\overset{3}{\triangle}_{1} \;= \sigma_3$$

$$C_3 \circ \sigma_2 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; C_3 \;{}_{3}\overset{1}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; {}_{1}\overset{2}{\triangle}_{3} \;= \sigma_1$$

$$C_3 \circ \sigma_3 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; C_3 \;{}_{2}\overset{3}{\triangle}_{1} \;\rightarrow\; {}_{3}\overset{1}{\triangle}_{2} \;= \sigma_2$$

$C_3^2 \circ C_3 = E$

$$C_3^2 \circ C_3^2 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; C_3^2 \;{}_{2}\overset{1}{\triangle}_{3} \;\rightarrow\; {}_{3}\overset{2}{\triangle}_{1} \;= C_3$$

$$C_3^2 \circ \sigma_1 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; C_3^2 \;{}_{1}\overset{2}{\triangle}_{3} \;\rightarrow\; {}_{3}\overset{1}{\triangle}_{2} \;= \sigma_2$$

$$C_3^2 \circ \sigma_2 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; C_3^2 \;{}_{3}\overset{1}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; {}_{2}\overset{3}{\triangle}_{1} \;= \sigma_3$$

$$C_3^2 \circ \sigma_3 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; C_3^2 \;{}_{2}\overset{3}{\triangle}_{1} \;\rightarrow\; {}_{1}\overset{2}{\triangle}_{3} \;= \sigma_1$$

$$\sigma_1 \circ C_3 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_1 \;{}_{3}\overset{2}{\triangle}_{1} \;\rightarrow\; {}_{3}\overset{1}{\triangle}_{2} \;= \sigma_2$$

$$\sigma_1 \circ C_3^2 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_1 \;{}_{2}\overset{1}{\triangle}_{3} \;\rightarrow\; {}_{2}\overset{3}{\triangle}_{1} \;= \sigma_3$$

$\sigma_1 \circ \sigma_1 = E$

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_1 \;{}_{3}\overset{1}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; {}_{3}\overset{2}{\triangle}_{1} \;= C_3$$

$$\sigma_1 \circ \sigma_3 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_1 \;{}_{2}\overset{3}{\triangle}_{1} \;\rightarrow\; {}_{2}\overset{1}{\triangle}_{3} \;= C_3^2$$

$$\sigma_2 \circ C_3 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_2 \;{}_{3}\overset{2}{\triangle}_{1} \;\rightarrow\; {}_{2}\overset{3}{\triangle}_{1} \;= \sigma_3$$

$$\sigma_2 \circ C_3^2 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_2 \;{}_{2}\overset{1}{\triangle}_{3} \;\rightarrow\; {}_{1}\overset{2}{\triangle}_{3} \;= \sigma_1$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_2 \;{}_{1}\overset{2}{\triangle}_{3} \;\rightarrow\; {}_{2}\overset{1}{\triangle}_{3} \;= C_3^2$$

$\sigma_2 \circ \sigma_2 = E$

$$\sigma_2 \circ \sigma_3 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_2 \;{}_{2}\overset{3}{\triangle}_{1} \;\rightarrow\; {}_{3}\overset{2}{\triangle}_{1} \;= C_3$$

$$\sigma_3 \circ C_3 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_3 \;{}_{3}\overset{2}{\triangle}_{1} \;\rightarrow\; {}_{1}\overset{2}{\triangle}_{3} \;= \sigma_1$$

$$\sigma_3 \circ C_3^2 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_3 \;{}_{2}\overset{1}{\triangle}_{3} \;\rightarrow\; {}_{3}\overset{1}{\triangle}_{2} \;= \sigma_2$$

$$\sigma_3 \circ \sigma_1 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_3 \;{}_{1}\overset{2}{\triangle}_{3} \;\rightarrow\; {}_{3}\overset{2}{\triangle}_{1} \;= C_3$$

$$\sigma_3 \circ \sigma_2 \;{}_{1}\overset{3}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; \sigma_3 \;{}_{3}\overset{1}{\triangle}_{2} \;\rightarrow\; {}_{2}\overset{1}{\triangle}_{3} \;= C_3^2$$

$\sigma_3 \circ \sigma_3 = E$

$\circ$	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
E	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	E	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^2	C_3^2	E	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	E	C_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	E

b)
Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} C_3 \circ (\sigma_1 \circ \sigma_3) &= (C_3 \circ \sigma_1) \circ \sigma_3 \\ C_3 \circ C_3^2 &= \sigma_3 \circ \sigma_3 \\ E &= E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 \circ (\sigma_3 \circ \sigma_2) &= (\sigma_1 \circ \sigma_3) \circ \sigma_2 \\ \sigma_1 \circ C_3^2 &= C_3^2 \circ \sigma_2 \\ \sigma_3 &= \sigma_3 \end{aligned}$$

Element	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
Inverses Element	E	C_3^2	C_3	σ_1	σ_2	σ_3

c) Nicht-abelsche Gruppe.

d) Es gibt sechs Untergruppen (einschließlich zwei trivialen Untergruppen):

1)

$\circ$	E
E	E

2)

$\circ$	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
E	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	E	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^2	C_3^2	E	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	E	C_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	E

3)

$\circ$	E	C_3	C_3^2
E	E	C_3	C_3^2
C_3	C_3	C_3^2	E
C_3^2	C_3^2	E	C_3

4)

$\circ$	E	σ_1
E	E	σ_1
σ_1	σ_1	E

5)

$\circ$	E	σ_2
E	E	σ_2
σ_2	σ_2	E

6)

$\circ$	E	σ_3
E	E	σ_3
σ_3	σ_3	E