Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 3
09. 11. 2021

Musterlösung der Blatt 3 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Beweisen Sie die folgenden Formeln durch vollständige Induktion über n:

   a) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\,, \quad n \in \mathbb{N}$

   b) $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^n \cdot 3^i = 2^{n-1}\left(3^{n+1}-1\right), \quad n \in \mathbb{N}$

   c) $\prod\limits_{i=1}^{n} \left(1+\frac{1}{i}\right)^i = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\,, \quad n \in \mathbb{N}$

   ($\prod$ ist das Produkt-Symbol: $\prod_{i=1}^{5}\ i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$)

   Lösung

   a) <u>Induktionsanfang:</u> Aussage ist wahr für $\underline{\mathbf{n_0 = 1}}$

   $$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 \Leftrightarrow \tfrac{1}{4}1^2(1+1)^2 = \tfrac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

   <u>Induktionsannahme:</u> Aussage sei wahr für ein $\underline{\mathbf{m}} \geq \mathbf{n_0}$, d.h es gilt:

   $$\sum_{i=1}^{m} i^3 = \tfrac{1}{4}m^2(m+1)^2$$

   <u>Induktionsschritt:</u> Es ist zu zeigen, daß aus der Richtigkeit der Aussage für $\underline{\mathbf{m}}$ die Richtigkeit der Aussage für $\underline{\mathbf{m+1}}$ folgt

   $$\begin{aligned}
   &\sum_{i=1}^{m+1} i^3 = \sum_{i=1}^{m} i^3 + (m+1)^3 \\
   &= \tfrac{1}{4}m^2(m+1)^2 + (m+1)^3 \\
   &= \tfrac{1}{4}(m+1)^2(m^2+4m+4) \\
   &= \tfrac{1}{4}(m+1)^2((m+1)+1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Die Aussage für } m+1 \text{ ist wahr.}
   \end{aligned}$$

   Damit ist gezeigt, daß Aussage für alle $n \geq 1$ gilt.

b) <u>Induktionsanfang:</u> $\underline{\mathbf{n_0 = 0}}$

$$2^0 \cdot 3^0 = 1 \;\Leftrightarrow\; 2^{-1} \cdot (3-1) = 1$$

<u>Induktionsannahme:</u> für $\underline{\mathbf{m}} \geq \mathbf{n_0}$

$$\sum_{i=0}^{m} 2^m \cdot 3^i = 2^{m-1}(3^{m+1} - 1)$$

<u>Induktionsschritt:</u> Für $\underline{\mathbf{m+1}}$

$$\sum_{i=0}^{m+1} 2^{m+1} \cdot 3^i = \sum_{i=0}^{m} 2^{m+1} \cdot 3^i + 2^{m+1} \cdot 3^{m+1}$$
$$= 2 \cdot \sum_{k=0}^{m} 2^m \cdot 3^k + 2^{m+1} \cdot 3^{m+1}$$
$$= 2 \cdot 2^{m-1}(3^{m+1} - 1) + 2^{m+1} \cdot 3^{m+1}$$
$$= 2^m(3^{m+1} - 1 + 2 \cdot 3^{m+1})$$
$$= 2^m(3 \cdot 3^{m+1} - 1)$$
$$= 2^m(3^{m+2} - 1) = \mathbf{2^{(m+1)-1}(3^{(m+1)+1} - 1)}$$

c) <u>Induktionsanfang:</u> $\underline{\mathbf{n_0 = 1}}$

$$(1+1)^1 = 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{2^2}{2} = 2$$

<u>Induktionsannahme:</u> für $\underline{\mathbf{m \geq n_0}}$

$$\prod_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!}$$

<u>Induktionsschritt:</u> Für $\underline{\mathbf{m+1}}$

$$\prod_{i=1}^{m+1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \prod_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i \cdot \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$$
$$= \frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \left(\frac{m+2}{m+1}\right)^{m+1}$$
$$= \frac{(m+1)^{m+1} \cdot (m+2)^{m+1}}{(m+1)!(m+1)^{m+1}}$$
$$= \frac{(m+2)^{m+1}}{(m+1)!}$$
$$= \frac{(m+2)^{m+1} \cdot (m+2)}{(m+1)! \cdot (m+2)}$$
$$= \frac{(m+2)^{m+2}}{(m+2)!} = \frac{((\mathbf{m+1})+\mathbf{1})^{(\mathbf{m+1})+\mathbf{1}}}{((\mathbf{m+1})+\mathbf{1})!}$$

2. **!!!!! BONUS Aufgabe !!!!!**

Beweisen Sie die folgenden Formeln durch vollständige Induktion über n:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\,, \quad n \geq 1;$

b) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{mit} \quad q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N}.$

Lösung

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\,,\,, \quad n \geq 1$

Ind. Anfang: $\underline{n_0 = 1}$
$1^2 = \frac{1}{6}1(1+1)(2\cdot 1+1) = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1$

Induktionsannahme: für $\underline{\mathbf{m \geq n_0}}$
$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$

Ind. Schritt:

$\underline{n = m+1}$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2$
$= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)^2$
$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6m+6)$
$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2+4m+3m+6)$
$= \frac{1}{6}(m+1)(2m(m+2)+3(m+2))$
$= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3) = \mathbf{\frac{1}{6}(m+1)[(m+1)+1][2(m+1)+1]}$

b) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{mit} \quad q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N};$

Ind. Anfang: $\underline{n_0 = 0}$

$q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$

<u>Induktionsannahme:</u> für $\underline{\mathbf{m \geq n_0}}$

$\sum_{k=0}^{m} q^k = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$

Ind. Schritt:

$\underline{n = m + 1}$

$\sum_{k=0}^{m+1} q^k = \sum_{k=0}^{m} q^k + q^{m+1}$

$= \frac{1-q^{m+1}}{1-q} + q^{m+1}$

$= \frac{1-q^{m+1}+q^{m+1}-q^{m+2}}{1-q}$

$= \frac{1-q^{m+2}}{1-q} = \frac{\mathbf{1-q^{(m+1)+1}}}{\mathbf{1-q}}$

3. Man stelle die komplexen Zahlen in der Form $x + iy\,,\ (x, y \in \mathbb{R})$ dar:

a) $(3+4i)(1-2i) = 3+4i-6i-8i^2 = 3-2i+8 = \mathbf{11\text{-}2i}$

b) $\dfrac{(1+2i)^2}{1-2i} = \dfrac{(1+2i)^2(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{(1+4i+4i^2)(1+2i)}{1-4i^2} = \dfrac{(-3+4i)(1+2i)}{1+4} = \dfrac{-3-6i+4i+8i^2}{5}$
$= -\mathbf{\dfrac{11}{5}} - \mathbf{\dfrac{2}{5}i}$

c) $\dfrac{1-i}{2+i} + i = \dfrac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} + i = \dfrac{2-2i-i+i^2}{5} + i = \dfrac{1-3i}{5} + i = \dfrac{1-3i+5i}{5} = \mathbf{\dfrac{1}{5}} + \mathbf{\dfrac{2}{5}i}$

d) $i^9 = i^4 \cdot i^4 \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot i = \mathbf{i}$

e) $\dfrac{3-i^2}{1-2i} = \dfrac{4}{1-2i} = \dfrac{4(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{4+8i}{5} = \mathbf{\dfrac{4}{5}} + \mathbf{\dfrac{8}{5}i}$