Musterlösung der Blatt 5 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Gegeben seien $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

   a) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$
   Lösung
   $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) $2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$
   Lösung
   $2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. (α sei der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von 2)).
   1) $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/4 \\ -1/3 \end{pmatrix}$; 2) für $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ und $\alpha=\pi/3$.
   Lösung

   1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot\dfrac{3}{2}+(-1)\cdot\dfrac{1}{4}+4\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2\dfrac{11}{12}$;
   2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha=3$.

3. !!!!! BONUS Aufgabe !!!!!!

Es sei $\vec{a} = (2, 0, -3)$, $\vec{b} = (3, 4, -3)$.
Berechnen Sie $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, den Flächeninhalt des Parallelogrammes, dass von $\vec{a}$, $\vec{b}$ aufgespannt wird, sowie einen Einheitsvektor $\vec{e}$, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

Lösung

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34};$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + (-3) \cdot (-3) = 15;$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-3) - (-3) \cdot 4 \\ 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{144+9+64} = \sqrt{217};$$

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{217}} \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$|\vec{e}| = \tfrac{1}{\sqrt{217}} \sqrt{217} = 1;$$

$$\vec{e} \cdot \vec{a} = \tfrac{1}{\sqrt{217}} (12 \cdot 2 - 8 \cdot 3) = 0;$$

$$\vec{e} \cdot \vec{b} = \tfrac{1}{\sqrt{217}} (12 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 8 \cdot 3) = 0.$$

4. Berechnen Sie für die 3 Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$,

$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$,

$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 5 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}$,

$(\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1) \cdot 2 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 2 \cdot 8 \\ 2 \cdot (-6) - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 8 - 3 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ 26 \end{pmatrix}$,

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - (-7) \cdot 1 \\ (-7) \cdot 3 - 14 \cdot 2 \\ 14 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -49 \\ 14 \end{pmatrix}$

d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 14 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-7) \cdot 2 = 28$,

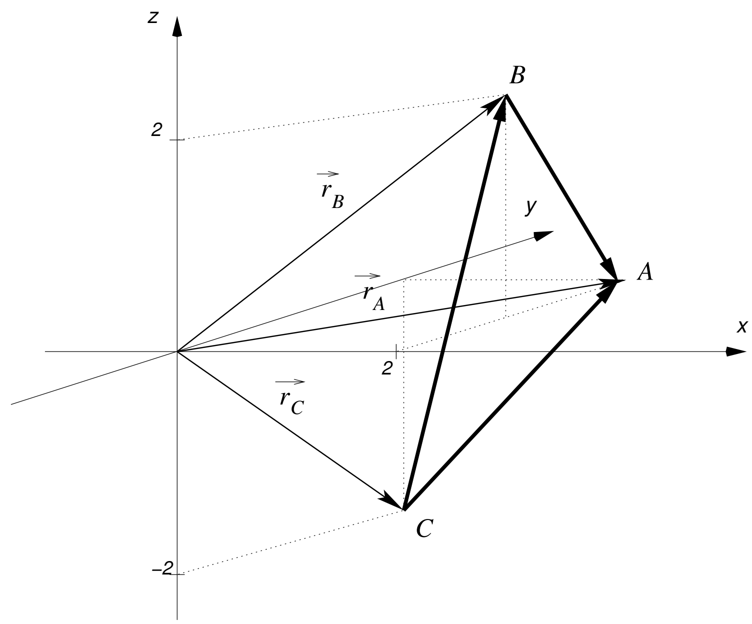
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$,

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-6) + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 5 = 28$,

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

5. Die drei Punkte A,B und C mit den Ortsvektoren $\vec{r_A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r_C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ legen die Ecken eines Dreiecks fest. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks, die Längen der drei Seiten und die drei Winkel.

Lösung



$$\overrightarrow{CA} = \vec{r_A} - \vec{r_C} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-2 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{r_B} - \vec{r_C} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-2 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{BA} = \vec{r_A} - \vec{r_B} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 4-4 \\ 0-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16+16+16} = \frac{1}{2}4\sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2};$ $\qquad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6};$ $\qquad |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2};$

$$\cos(\angle(ACB)) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = \frac{4+8}{4\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \angle(ACB) = \frac{\pi}{6};$$

$$\cos(\angle(ABC)) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{4+8}{4\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \angle(ABC) = \frac{\pi}{6};$$

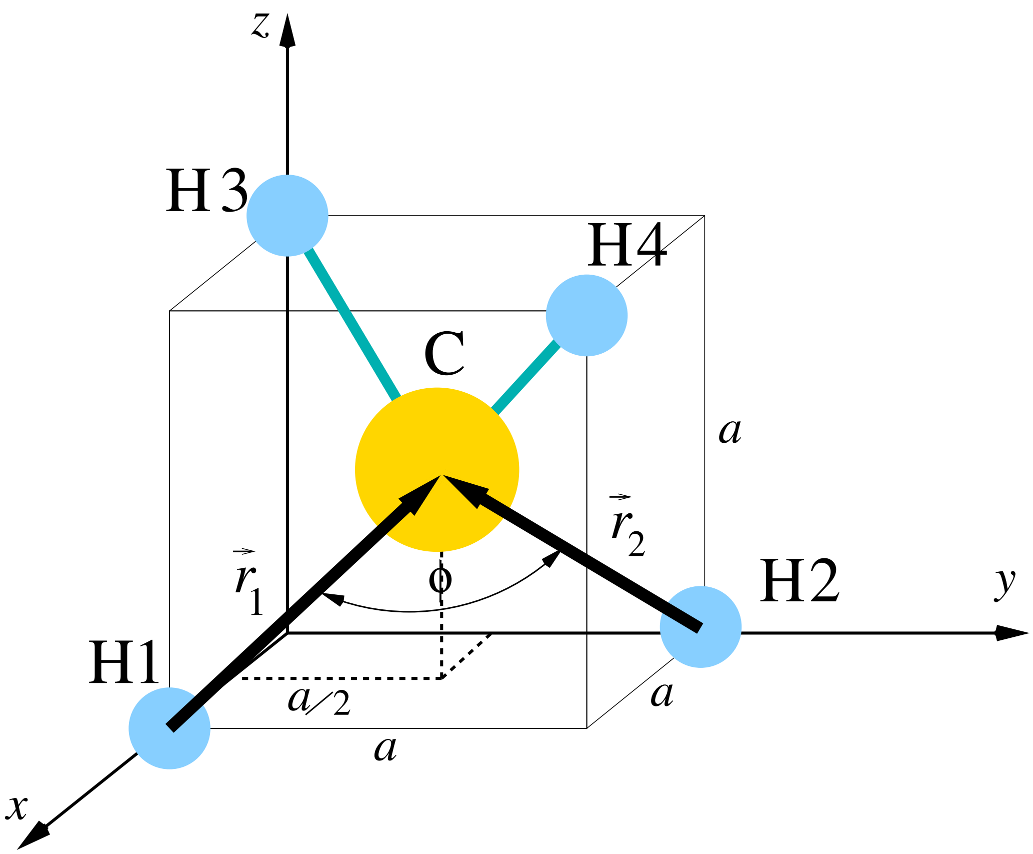
$$\cos(\angle(CAB)) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{-4}{4\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}; \qquad \angle(CAB) = \frac{2\pi}{3};$$

$(\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}).$

F1. !!!**Fakultative** !!!!

Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Wahl des Koordinatensystems den Bindungswinkel H-C-H des Metan Moleküls CH_4 (Tetraederwinkel).

Lösung



$$\vec{r}_{H1} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_{H2} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_{H3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_{H4} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_{C} = \begin{pmatrix} 0.5a \\ 0.5a \\ 0.5a \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_C - \vec{r}_{H1} = \begin{pmatrix} -0.5a \\ 0.5a \\ 0.5a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_C - \vec{r}_{H2} = \begin{pmatrix} 0.5a \\ -0.5a \\ 0.5a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\cos\phi = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1|\,|\vec{r}_2|} = \frac{a^2(-0.5^2 - 0.5^2 + 0.5^2)}{\sqrt{a^2[(-0.5)^2 + 0.5^2 + 0.5^2]}\sqrt{a^2[0.5^2 + (-0.5)^2 + 0.5^2]}}$$

$$\cos\phi = \frac{-0.5^2}{0.5^2 \cdot 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\phi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \sim 109.47^\circ$$