Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 10
11. 01. 2022

Musterlösung der Blatt 10 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Bestimmen Sie – falls vorhanden – die Grenzwerte

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$\text{c)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos\,x)}{x^2\,\cos\,x} \qquad \text{d)}\quad \lim\nolimits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$$

Lösung

a)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-3x+6}{x^2-2x-10x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{1}{8}$$

l'Hospital Regel:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)'}{(x^2-12x+20)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-12}=\frac{-1}{-8}=\frac{1}{8}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos\,x)}{x^2\,\cos\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos\,x)(1+\cos\,x)}{x^2\,\cos\,x(1+\cos\,x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{2}{\cos\,x(1+\cos\,x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\,x}{x}\cdot\frac{\sin\,x}{x}\cdot\frac{2}{\cos\,x(1+\cos\,x)}=1$$

l'Hospital Regel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos\,x)}{x^2\,\cos\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{[2(1-\cos\,x)]'}{[x^2\,\cos\,x]'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\sin\,x}{2x\,\cos\,x-x^2\,\sin\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{[2\,\sin\,x]'}{[2x\,\cos\,x-x^2\,\sin\,x]'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\cos\,x}{2\,\cos\,x-4x\,\sin\,x-x^2\cos\,x}=\frac{2}{2}=1$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{n^4\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}-1}=-1\,;$$

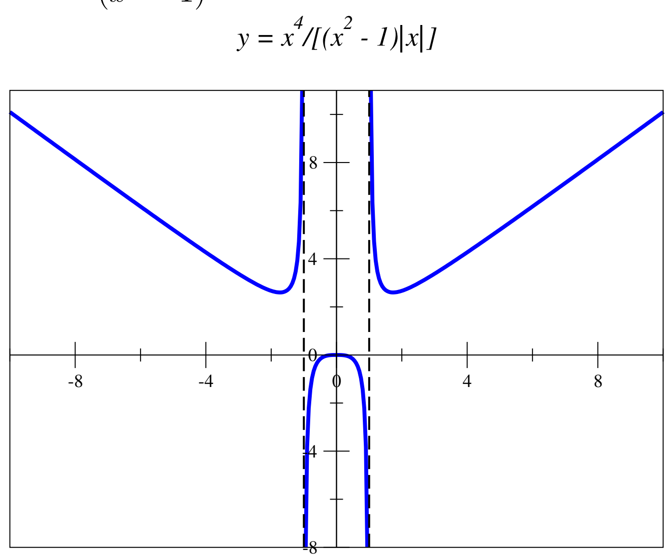
2. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich, die Nullstellen, die Symmetrie, das Verhalten für $x \to \pm\infty$, für $x \to 0 \pm 0$, für $x \to 1 \pm 0$ und für $x \to -1 \pm 0$ von

$$f(x) = \frac{x^4}{(x^2 - 1)\,|x|}\,.$$

Erstellen Sie einen Graphen der Funktion f. Falls Unstetigkeitsstellen auftreten, geben Sie deren Typ an.

Lösung

Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-1\,, 0\,, 1\}$;
Simmetriesch $f(x) = f(-x)$.
$x \to 0 + 0 \;\; f(x) \to 0$;
$x \to 0 - 0 \;\; f(x) \to 0$;
An $x = 0$ ist hebbare Unstetigkeit. $\Rightarrow \quad f(x) = \dfrac{x^2|x|}{(x^2 - 1)}$



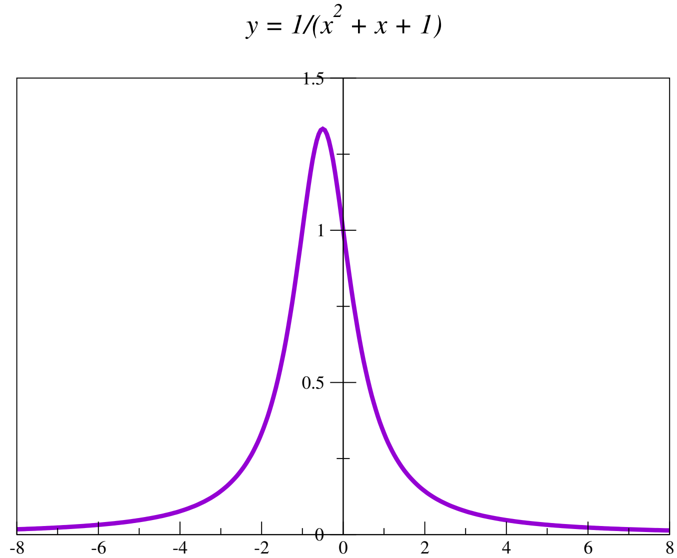
$x \to +\infty \;\; f(x) \to +\infty$;
$x \to -\infty \;\; f(x) \to +\infty$;
$x \to 1 + 0 \;\; f(x) \to +\infty$;
$x \to 1 - 0 \;\; f(x) \to -\infty$;
$x \to -1 + 0 \;\; f(x) \to -\infty$;
$x \to -1 - 0 \;\; f(x) \to +\infty$;

An $x = -1$ und $x = 1$ – die Polen mit Vorzeichenwechsel.

3. Skizzieren Sie die Funktionen und geben Sie den maximalen Definitionsbereich an. Falls Unstetigkeitsstellen auftreten, geben Sie deren Typ an:

a) $$y = \frac{1}{x^2+x+1}$$

$D_f := \mathbb{R}$;

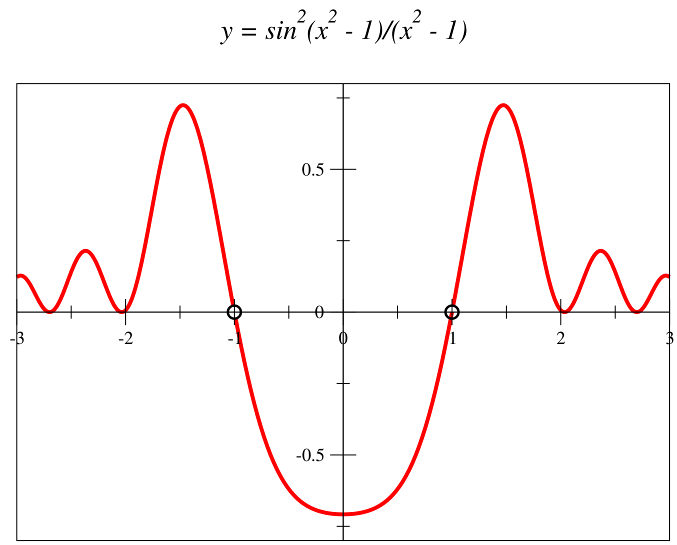


b) $$y = \frac{\sin^2(x^2-1)}{x^2-1}$$

$D_f := \mathbb{R} \setminus \{-1\,,1\}$;
An $x=-1$ und $x=1$ – hebbare Unstetigkeiten.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(x^2-1)}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{\sin((1\pm\delta)^2-1)}{(1\pm\delta)^2-1} \cdot \sin((1\pm\delta)^2-1) = 0$$



c) $$y = \frac{x^4}{x^2-x}$$

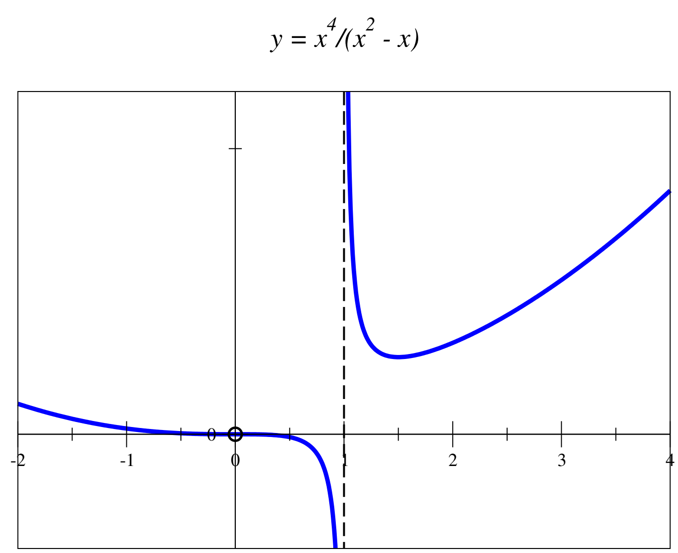
$D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\,,1\}$;
An $x=1$ – Pol mit Vorzeichenwechsel.

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^4}{x^2-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^4}{x^2-x} = -\infty$$

An $x=0$ – hebbare Unstetigkeit.

$$\lim_{x\to 0\pm 0} \frac{x^4}{x^2-x} = 0$$

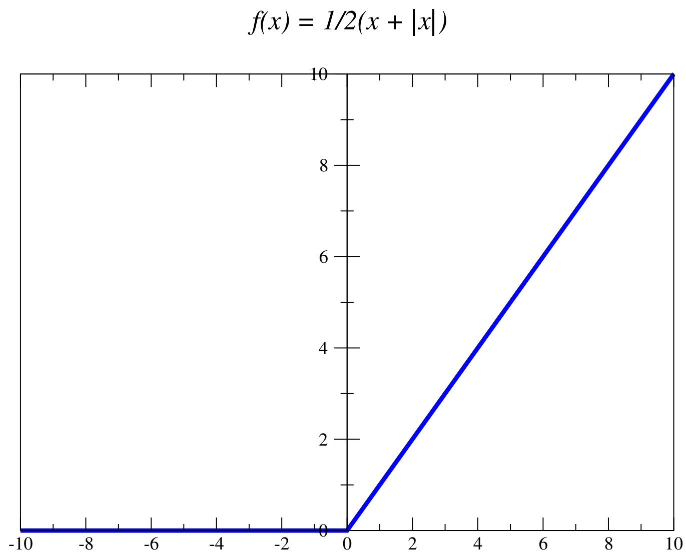


4. Bestimmen Sie jeweils den rechts- und linksseitigen Grenzwert an der Stelle $x = 0$ für die folgenden Funktionen und schließen Sie auf Stetigkeit.

$$a)\quad f(x) = \tfrac{1}{2}(x + |x|)$$

$$b)\quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}(x^2+1) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

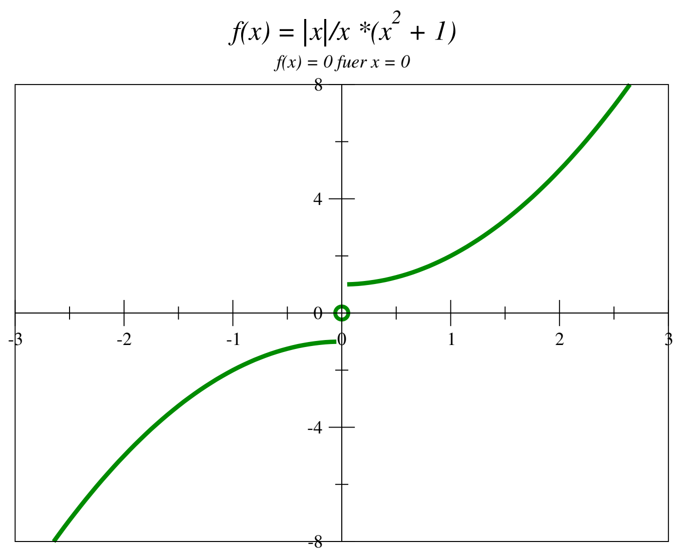
Lösung



$$f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$$

$$\lim_{x\to 0\pm 0} \frac{1}{2}(x + |x|) = 0$$

Die Funktion ist stetig.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}(x^2+1) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x}(x^2+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{|x|}{x}(x^2+1) = -1$$

Die Funktion ist unstetig.