Name: Matrikelnummer: **01.03.2022**

1. **Gruppenaxiome:**

   a) die Menge G ist bzgl. $\circ$ abgeschlossen:
   $a \circ b = c \in G \qquad \forall a, b \in G$

   b) es gilt das Assoziativgesetz:
   $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \qquad \forall a, b, c \in G$

   c) es existiert ein **linksneutrales Element** e, so daß gilt:
   $e \circ a = a \qquad \forall a \in G$

   d) es existiert zu jedem Element $a \in G$ ein **linksinverses Element** a^{-1}, so daß gilt:
   $a^{-1} \circ a = e \qquad \forall a \in G$

2. **Analytische Geometrie und lineare Algebra**

   i) **Das skalare Produkt** zweier Vektoren
   $(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$

   ii) **Das Kreuzprodukt** $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

   iii) **Das Spatprodukt** dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}$: $\qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

   iv) Die Länge (**Norm**) eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$
   $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$

   v) **Matrizen**
   Addition, Subtraktion:

   $$C = A \pm B \ \text{ bzw. } \ (C_{ij}) = (A_{ij}) \pm (B_{ij}) \ \text{ mit } \ C_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}$$

   Matrixmultiplikation:
   Das Produkt einer $m \times n$-Matrix A mit einer $n \times p$-Matrix B ist definiert durch die $m \times p$-Matrix C $(C = AB)$ mit dem Elementen

   $$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, p)$$

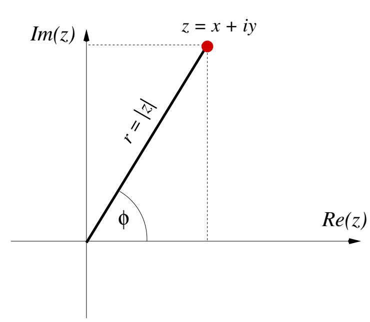
3. **Methoden der Grenzwertbestimmung**
   Seien f und g zwei Funktionen mit den Grenzwerten F und G an der Stelle $x = x_0$, so gilt:
   a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = F \pm G$ b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = F \cdot G$ c) $\lim\limits_{x \to x_0} (f/g)(x) = F/G$ falls $G \neq 0$

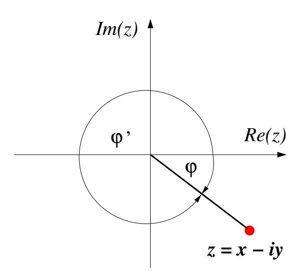
4. **Prinzip der vollständigen Induktion:**
   $A(n)$ sei eine Aussage über die Zahl n $(n \in \mathbb{N})$. Ist die Aussage für $n = n_0$ richtig und folgt aus der Richtigkeit von $A(n)$diejenige von $A(n+1)$, so ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

5. **Komplexe Zahlen**

   $z = x + iy$; $z^* = x - iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$
   $x = Re(z)$; $y = Im(z)$
   Addition:
   $(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$
   Multiplikation:
   $(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$
   Absolutbetrag:
   $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$
   Die Eulersche Darstellung:
   $z = |z| e^{i\phi} = r\, e^{i\phi}$

   Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene





   Berechnung des Winkels ϕ mit Hilfe des Arkuskosinus im Intervall $[-\pi, \pi]$

   $$\phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|} & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{|z|} & \text{für } y < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } |z| = 0 \end{cases}$$

   Im Intervall $[0, 2\pi]$:

   $$\phi' = \begin{cases} \phi + 2\pi & \text{falls } \phi < 0 \\ \phi & \text{sonst} \end{cases}$$

6. **Ableitungen elementarer Funktionen**

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
x^a	$ax^{a-1} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$1/x$	$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\sin x$	$\cos x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\coth x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

Differentiationsregeln

Summenregel
$h(x) = af(x) + bg(x)$
$h'(x) = af'(x) + bg'(x)$

Produktregel
$h(x) = f(x)g(x)$
$h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

Quotientenregel
$h(x) = f(x)/g(x);\ g(x) \neq 0$
$h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

Kettenregel
$h(x) = f(g(x))$
$h'(x) = \dfrac{df}{dg}\dfrac{dg}{dx}$

7. **Stammfunktionen und unbestimmtes Integrale**

$\int f(x)dx = F(x) + C;\ F'(x) = f(x);\ F(x)$ - Stammfunktion

Grundintegrale:

Funktion	Stammfunktion
$\int x^a dx$	$= \dfrac{1}{a+1}x^{a+1} + C,\ a \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x} dx$	$= \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^{ax} dx$	$= \dfrac{1}{a}e^{ax} + C,\ a \neq 0$

Funktion	Stammfunktion
$\int \sin(ax)\, dx$	$= -\dfrac{1}{a}\cos(ax) + C,\ a \neq 0$
$\int \cos(ax)\, dx$	$= \dfrac{1}{a}\sin(ax) + C,\ a \neq 0$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist für eine in $[a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ eine beliebige Stammfunktion $F(x)$ bekannt, so erhält man das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ durch

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Integrationsregeln

Seien $F(x)$ und $G(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$ und $g(x)$.

Summenregel:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + C$$

Partielle Integration:

$$\int_a^b F'(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)G'(x)dx$$

Substitutionsregel:

Ist $g(u)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar und $f(v)$ stetig für alle $v \in \{v|v = g(u),\ u \in [a, b]\}$ dann gilt:

$$\int_a^b f(g(u))g'(u)du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(v)dv$$

---

8. **Elementare Funktionen**

$$x^u \cdot x^v = x^{u+v}$$
$$(x^u)^v = x^{u \cdot v}$$
$$x^u \cdot y^u = (x \cdot y)^u$$
$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{N}$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a x \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$
$$\log_e x = \ln x \qquad \log_{10} x = \lg x$$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Additionstheorem
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

Wichtige Funktionswerte

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
Kosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Tangens	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert	0	nicht definiert

$\sqrt{2} \approx 1.41$
$\sqrt{3} \approx 1.73$
$\sqrt{5} \approx 2.24$
$e \approx 2.72$