Universität München
Departament Chemie
Lehrbereich Phys. Chemie
Prof. Dr. H. Ebert

WS 21/22
Blatt 12
25. 01. 2022

Musterlösung der Blatt 12 zur Vorlesung „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I“

1. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen, indem Sie den Differenzenquotienten berechnen und den Grenzwert bilden:

$$a) \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

$$b) \qquad f(x) = \sin^2(2x)$$

Lösung

a)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b)

NR.

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin^2 x = 1 - \cos(2x) \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$f(x) = \sin^2(2x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4x))$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}[1 - \cos(4((x+\Delta x))] - \frac{1}{2}[1 - \cos(4x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4((x+\Delta x)) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(4x) - \cos(4(x+\Delta x))}{\Delta x}$$

Weiter benutzen die Formel:

$$\cos\, x - \cos\, y = -2\, \sin\, \frac{x+y}{2}\, \sin\, \frac{x-y}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin \dfrac{4x + 4(x + \Delta x)}{2}\, \sin \dfrac{4x - 4(x + \Delta x)}{2}}{\Delta x}$$

$$= - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \dfrac{8x + 4\Delta x)}{2}\, \sin \dfrac{4x - 4x - \Delta x)}{2}}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(4x + 2\Delta x)\, \sin(-2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{2}\, \sin(4x + 2\Delta x)\, \sin(2\Delta x)}{\mathbf{2}\, \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2\, \sin(4x + 2\Delta x)\, \frac{\sin(2\Delta x)}{(2\, \Delta x)} = 2 \sin(4x)$$

b) II

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 2(x+\Delta x) - \sin^2(2x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Big(\sin(2(x+\Delta x)) - \sin(2x)\Big)\Big(\sin(2(x+\Delta x)) + \sin(2x)\Big)}{\Delta x}$$

Weiter die folgende Formeln benutzen werden:

$$\sin\ x + \sin\ y = 2\ \sin\ \frac{x+y}{2}\ \cos\ \frac{x-y}{2}\ ;$$
$$\sin\ x - \sin\ y = 2\ \cos\ \frac{x+y}{2}\ \sin\ \frac{x-y}{2}\ )$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{2(x+\Delta x)+2x}{2}\ \sin\frac{2(x+\Delta x)-2x}{2}\ 2\sin\frac{2(x+\Delta x)+2x}{2}\ \cos\frac{2(x+\Delta x)-2x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(2x+2\Delta x+2x)\sin(2x+2\Delta x-2x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(4x+2\Delta x)\sin(2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cdot\sin(4x+2\Delta x)\sin(2\Delta x)}{2\Delta x} = 2\sin(4x)$$

2. Benutzen Sie Summen-, Produkt-, und Quotientenregeln um ausgehend von $\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$, $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ und $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ die Ableitungen folgender Funktionen zu bestimmen:

$$a) \qquad f(x) = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 \qquad b) \qquad f(x) = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$$

$$c) \qquad f(x) = 0.8\sqrt[4]{x} - \frac{x^3}{0.3} + \frac{1}{5x^2} \qquad d) \qquad f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$$

$$e) \qquad f(x) = x^3\, e^x\, \sin x$$

Lösung

a) $f(x) = (\sqrt{a} - x^{1/2})(\sqrt{a} - x^{1/2})$ (Produktregel)

$$f'(x) = (\sqrt{a} - x^{1/2})'(\sqrt{a} - x^{1/2}) + (\sqrt{a} - x^{1/2})(\sqrt{a} - x^{1/2})' =$$

$$= \Big(-\frac{1}{2}x^{-1/2}\Big)(\sqrt{a} - x^{1/2}) + (\sqrt{a} - x^{1/2})\Big(-\frac{1}{2}x^{-1/2}\Big) = -\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})}{\sqrt{x}};$$

b) $f(x) = 8\,x^{-1/4} - 6\,x^{-1/3}$

$f'(x) = \left(8\,x^{-1/4}\right)' - \left(6\,x^{-1/3}\right)' = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) x^{-\frac{1}{4}-1} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1} = -2\,x^{-\frac{5}{4}} + 2\,x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt[4]{x^5}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}$

c) $f(x) = 0.8\,x^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{0.3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^{-2}$

$$f'(x) = \left(0.8\,x^{\frac{1}{4}}\right)' - \left(\frac{1}{0.3}\,x^3\right)' + \left(\frac{1}{5}\,x^{-2}\right)' = 0.8 \cdot \frac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{0.3} \cdot 3 \cdot x^2 + \frac{1}{5} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{0.2}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{x^2}{0.1} - \frac{2}{5x^3}$$

d) $f(x) = \dfrac{\cos^2\ x}{1 - \sin\ x} = \dfrac{(1 - \sin^2\ x)}{1 - \sin\ x} = \dfrac{(1 - \sin\ x)(1 + \sin\ x)}{1 - \sin\ x} = 1 + \sin\ x$

$f'(x) = (1 + \sin\ x)' = \cos\ x$

Die Quotientenregel

$$f'(x) = \left(\frac{1 - \sin^2\ x}{1 - \sin\ x}\right)' = \frac{(1 - \sin\ x \sin\ x)'(1 - \sin\ x) - (1 - \sin^2 x)(1 - \sin\ x)'}{(1 - \sin\ x)^2}$$

$$= \frac{-(\cos\ x \sin\ x + \sin\ x \cos\ x) - (1 + \sin\ x)(-\cos\ x)}{(1 - \sin\ x)} = \frac{\cos\ x(1 - \sin\ x)}{(1 - \sin\ x)} = \cos\ x$$

e) $f'(x) = (x^3)'\, e^x\ \sin\ x + x^3 \left[(e^x)' \sin\ x + e^x (\sin\ x)'\right] = 3x^2 e^x \sin\ x + x^3 e^x \sin\ x + x^3 e^x \cos\ x$

3. Benutzen Sie Summen-, Produkt-, Quotienten- , sowie die Kettenregel um ausgehend von $\dfrac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$, $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ und $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ die Ableitungen folgender Funktionen zu bestimmen:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}, \quad \frac{(\sin\ x + x)^2}{e^x+1}, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^n, \quad \sinh x, \quad \cosh x$$

Lösung

1. **Quotientenregel**
$f'(x) = \dfrac{(1/2)x^{-1/2}(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x}(1/2)x^{-1/2}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

2. **Qoutienten- und Kettenregel**

$$f'(x) = \frac{[(\sin\ x + x)^2]'(e^x+1) - (\sin\ x + x)^2(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{2(\sin\ x + x)(\cos\ x + 1)(e^x+1) - (\sin\ x + x)^2 e^x}{(e^x+1)^2}$$

3. $(\sum_{i=0}^{n} a_i x^n)' = \sum_{i=0}^{n} a_i (x^n)' = \sum_{i=0}^{n} a_i n x^{n-1}$,

4. $(\sinh x)' = \left(\dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$,

5. $(\cosh x)' = \left(\dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$,

FAKULTATIVE Aufgabe

F2. Bestimen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen, falls sie existieren (die Regel von l'Hospital) :

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{e^x\cdot\sin x}{\ln(x+1)}} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{5\cos x-\cos(5x)}{5\cot x-\cot(5x)};$$

Lösung

a) $$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{e^x\cdot\sin x}{\ln(x+1)}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sin x}{\ln(x+1)}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}e^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(x+1)}}$$

$$\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}e^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(\ln(x+1))'}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}e^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{x+1}}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}e^x\cdot\lim_{x\to 0}(\cos x)\,(x+1)}=1$$

b) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{5\cos x-\cos(5x)}{5\cot x-\cot(5x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-5\sin x+5\sin(5x)}{-5\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{5}{\sin^2(5x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{[-\sin x+\sin(5x)]\sin^2 x\,\sin^2(5x)}{(\sin^2 x-\sin^2(5x))}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-[\sin x-\sin(5x)]\sin^2 x\,\sin^2(5x)}{(\sin x-\sin(5x))(\sin x+\sin(5x))}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin^2 x\,\sin^2(5x)}{(\sin x+\sin(5x)}=-\frac{1}{2}$$